H. Goldstein
Revidert januar 2008

Litt om forventet nytte og risikoaversjon.

Eksempler på økonomisk anvendelse av forventning og varians.

Dette notatet er ment å illustrere noen begreper fra Løvås, kapittel 4, satt i en mer økonomisk kontekst. Blant annet skal vi berøre begrepene risiko og risikoaversjon som er viktig i teorien for beslutninger under usikkerhet. Som illustrasjon og bakgrunn vil vi ta utgangspunkt i et enkelt eksempel (hentet fra notatet Goldstein H., ”En kort innføring i sannsynlighetsregning”, Sosialøkonomisk institutt, 2000.). I appendiks 2 er det gitt et mer økonomisk preget eksempel fra forsikring.

Bakgrunnseksperimentet

La X = antall seksere i to kast med en rettferdig terning. Vi vil først finne fordelingen for X. De mulige verdiene X kan anta er 0, 1, 2, slik at verdimengden for X er $V_X = \{0, 1, 2\}$. Det som gjenstår er å bestemme de tre tilhørende sannsynlighetene, $P(X = 0), P(X = 1), P(X = 2)$. Den siste er den enkleste. Definer begivenhetene, $A_1 =$ “Sekser i første kast” og $A_2 =$ “Sekser i annet kast”. Det er rimelig å anta at utfallet av de to kastene er uavhengig av hverandre slik at A_1 og A_2 er uavhengige begivenheter. Dessuten $P(A_1) = P(A_2) = 1/6$. Vi får dermed

(1) $$P(X = 2) = P(\text{"to seksere"}) = P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2) = \frac{1}{36}$$

Utfallsrommet for det bakenforliggende eksperimentet, “to kast med rettferdig terning”, kan beskrives ved

$$S = \{e_1, e_2, \ldots, e_{36}\} =$$
$$= \begin{matrix} \{ (1,1), (1,2), (1,3), \ldots, (1,6), \\ (2,1), (2,2), (2,3), \ldots, (2,6), \\ (3,1), (3,2), (3,3), \ldots, (3,6), \\ \vdots \\ (6,1), (6,2), (6,3), \ldots, (6,6) \} \end{matrix}$$

der f.eks. utfallet (1,3) betyr at første kast ga en ener og annet kast en treer. Av samme grunn som i (1) er sannsynligheten for dette utfallet lik 1/36. Det samme gjelder naturligvis for alle de andre utfallene (m.a.o. vi har en uniform sannsynlighets-modell for eksperimentet). Vi finner

$$P(X = 1) = P(\{ (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (5,6), (4,6), (3,6), (2,6), (1,6) \}) = \frac{10}{36}$$

Siden $P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = 1$, har vi

$$P(X = 0) = 1 - P(X = 1) - P(X = 2) = 1 - \frac{10}{36} - \frac{1}{36} = \frac{25}{36}$$

Sannsynlighetsfordelingen for *X* kan nå beskrives ved følgende tabell

Tabell 1

x	0	1	2
$P(X = x)$	$\frac{25}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{1}{36}$

Uttrykket $f(x) = P(X = x)$ kan ses på som en funksjon, definert for $x = 0,1,2$, ved $f(0) = 25/36$, $f(1) = 10/36$, $f(2) = 1/36$. Den kalles ofte den elementære sannsynlighetsfunksjonen for *X*, eller, som i Løvås, punktsannsynligheten for *X*.

Oppgave 1: Forklar hvorfor den stokastiske variabelen $Z =$“antall enere i to kast med terningen”, har samme fordeling som *X*.

Et spill basert på bakgrunnseksperimentet

Anta nå at vi blir tilbudt følgende spill: Mot å betale 4 kr. i spilleavgift får vi kaste terningen 2 ganger og motta 10 kr. for hver sekser vi får. Hva er sannsynlighetsfordelingen for fortjenesten, Y?

Fortjenesten kan uttrykkes ved hjelp av X slik: $Y = 10X - 4$

Siden X er en stokastisk (tilfeldig) variabel må Y også være det (verdien av Y er tilfeldig bestemt) med en sannsynlighetsfordeling som vi kan finne som følger.

De mulige verdiene for Y er gitt ved

X	0	1	2
Y	-4	6	16

Vi finner $P(Y = -4) = P(X = 0) = 25/36$ osv. og dermed fordelingen for Y

y	-4	6	16
$P(Y = y)$	$\frac{25}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{1}{36}$

Den elementære sannsynlighetsfunksjonen for Y er $g(y) = P(Y = y)$, definert i tabellen for $y = -4, 6, 16$.

La oss finne forventningen til X og Y. Fra tabell 1får vi

$$\mathrm{E}(X) = 0 \cdot \frac{25}{36} + 1 \cdot \frac{10}{36} + 2 \cdot \frac{1}{36} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$$

Det virker kanskje litt rart at forventningsverdien ikke hører med blant de mulige verdiene for X, men tenker man på $\mathrm{E}(X)$ som en gjennomsnittsverdi av X (i det lange løp når X observeres mange ganger), bør det likevel være forståelig.

Av regel 4.7 i Løvås finner vi forventet fortjeneste:

$$\mathrm{E}(Y) = \mathrm{E}(10X - 4) = 10 \cdot \mathrm{E}(X) - 4 = 10 \cdot \frac{1}{3} - 4 = -\frac{2}{3}$$

At forventet fortjeneste er negativ betyr at vi i gjennomsnitt (når vi spiller mange ganger) taper på å delta i spillet.

Et pengespill der forventet fortjeneste er 0, kan vi kalle rettferdig. Finnes det en spilleavgift som gjør det foreliggende spillet rettferdig? La spilleavgiften være a kr. Fortjenesten blir da $Y = 10X - a$. Spillet er rettferdig hvis

$$0 = \mathrm{E}(Y) = 10\mathrm{E}(X) - a = \frac{10}{3} - a = 3.333\mathrm{K} - a$$

det vil si hvis $a =$ kr. $3.333\mathrm{K}$. Med norske pengeenheter fins det altså ingen rettferdig spilleavgift. En avgift på 3.50 gir tap i det lange løp og 3 kroner gir positiv fortjeneste i det lange løp.

Anta spilleavgiften er kr. 3.50. Hva blir forventet total fortjeneste for 1000 spill? For et enkelt spill er $\mathrm{E}(Y) = \frac{10}{3} - \frac{7}{2} = -\frac{1}{6}$. La Y_t være fortjenesten for spill nr. i, for $i = 1, 2, 3, \ldots, 1000$. Total fortjeneste blir $Y = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_{1000}$.
Av regel 4.12 i Løvås får vi

$$\mathrm{E}(Y) = \mathrm{E}(Y_1) + \cdots + \mathrm{E}(Y_{1000}) = -\frac{1}{6} - \frac{1}{6} - \cdots - \frac{1}{6} = -\frac{1000}{6} = -167 \text{ kroner}$$

Vi skal også beregne variansen til X og Y. Av regel 4.7 i Løvås får vi

$$\mathrm{E}(X^2) = 0^2 \frac{25}{36} + 1^2 \frac{10}{36} + 2^2 \frac{1}{36} = \frac{14}{36} = \frac{7}{18}$$

Siden $\mathrm{E}(X) = 1/3$, får vi

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X^2) - [\mathrm{E}(X)]^2 = \frac{7}{18} - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{5}{18}$$

Av regel 4.9 I Løvås får vi

$$\mathrm{Var}(Y) = \mathrm{Var}(10X - 4) = 100 \cdot \mathrm{Var}(X) = \frac{500}{18} = \frac{250}{9}$$

Merk at benevningen for både Var(X) og Var(Y) er kr^2.

Standardavvikene blir

$$\sqrt{\mathrm{Var}(X)} = \sqrt{\frac{5}{18}} = 0.527 \quad \text{(benevning kr.)}$$

$$\sqrt{\mathrm{Var}(Y)} = \sqrt{\frac{250}{9}} = 5.270 \quad \text{(benevning kr.)}$$

Standardavvik som mål på risiko

Er forventet fortjeneste et tilstrekkelig godt mål til å vurdere hvor attraktivt et spill om usikre aktiva er? For å få litt innsikt i dette spørsmålet skal vi se på to spill. **Spill 1** er som i vårt eksempel, men med en spilleavgift på 2 kroner. Da blir $Y = 10X - 2$, og forventet fortjeneste $\mathrm{E}(Y) = 10/3 - 2 = 4/3$.

Spill 2 består i å motta 10 000 kr. for hver sekser man får i to kast med terningen. For å delta i dette spillet må man imidlertid betale 3332 kr. Fortjenesten, Z, blir her $Z = 10000X - 3332$, og forventet fortjeneste

$$\mathrm{E}(Z) = \frac{10000}{3} - 3332 = \frac{4}{3}$$

Spill 1 og 2 har altså samme forventet fortjeneste, men er de like attraktive? De fleste ville vel svare nei siden risikoen er forskjellig. Y varierer i verdimengden $V_Y = \{-2, 8, 18\}$ med sannsynlighet for et tap på 2 kroner lik $25/36 \approx 69\%$. Sannsynligheten for tap er stort, men tapet er så lite at nok mange ville vært interessert i å spille. Z, på den annen side, varierer i $V_Z = \{-3332, 6668, 16668\}$ med tilhørende sannsynligheter, 69%, 28%, 3% h.h.v. Sannsynligheten for et tap på 3 332 kr. er også her 69%. På grunn av utbredt risikoaversjon vil nok en del flere betakke seg for å satse på spill 2. Forskjellen i risiko kommer til uttrykk ved forskjellen i variasjon mellom Y og Z, for eksempel målt med standardavvikene, $\sqrt{\mathrm{Var}(Y)} = 5,270$ og $\sqrt{\mathrm{Var}(Z)} = 5270$ (sjekk!).

Standardavviket er derfor noen ganger brukt som mål på risiko. Generelt vil risikoen for et spill (investering) med et usikkert aktivum imidlertid ikke bare avhenge av variasjonen av fortjenesten for det aktuelle spillet men også av variasjonen av andre, relaterte spill i markedet (se Varian, ``Intermediate Microeconomics'', avsnitt 13.2).

Forventet nytte

Et relevant eksempel der forventningsbegrepet kommer til nytte, er ved beregning av forventet nytte: La A være et usikkert (nummerisk) aktivum som antar følgende verdier, $a_1, a_2, \ldots, a_k$, med sannsynligheter, $p_i = P(A = a_i)$, for $i = 1, 2, \ldots, k$. Hvis $U(a)$ er en nyttefunksjon definert for de ulike aktiva, kan vi beregne forventet nytte av A (se regel 4.7 i Løvås):

$$\mathrm{E}(U(A)) = \sum_{\text{Alle } a} U(a)P(A = a) = U(a_1)p_1 + U(a_2)p_2 + \cdots + U(a_k)p_k$$

I teorien for beslutninger under usikkerhet er det argumentert med at under visse generelle krav på preferanserelasjonen mellom usikre aktiva, kan *nytten av et usikkert aktivum defineres som forventningsverdien,* $\mathrm{E}(U(A))$.

[**Litt utdyping:** Vi ønsker å definere nytten for et usikkert aktivum, *A*, med mulige verdier, $a_1, a_2, \ldots, a_k$ og tilhørende sannsynligheter, $p_1, p_2, \ldots, p_k$. La $U(a)$ være nytten definert for de enkelte aktiva. Da blir $U(A)$ en stokastisk variabel med mulige verdier, $U(a_1), U(a_2), \ldots, U(a_k)$ og tilhørende sannsynligheter henholdsvis, $p_1, p_2, \ldots, p_k$. Vi kunne naturligvis si at nytten av *A*, er gitt ved de *k* tallene, $U(a_1), U(a_2), \ldots, U(a_k)$, men dette er tungvint. Vi ønsker i stedet ett enkelt tall for nytten til *A* (ikke *k* tall). Det kan vises at tallet $\mathrm{E}(U(A)) = \sum_{i=1}^{k} U(a_i)p_i$ tilfredsstiller kravene til en nytte under generelle betingelser. $\mathrm{E}(U(A))$ kan dermed ses på som en representant for alle $U(a_1), U(a_2), \ldots, U(a_k)$, og tas som definisjonen på nytten til *A*.]

Risikoaversjon

La A være et usikkert (nummerisk) aktivum som antar en av følgende verdier, $a_1, a_2, \ldots, a_k$, med sannsynligheter, $p_i = P(A = a_i)$, for $i = 1, 2, \ldots, k$. Anta en person har en voksende og strengt konkav nyttefunksjon, $U(a)$, med hensyn til de mulige aktivaene (som vi har antatt er nummeriske), $a_1, a_2, \ldots, a_k$. La forventningsverdien til A være

$$\mu = \mathrm{E}(A) = a_1 p_1 + a_2 p_2 + \cdots + a_k p_k$$

Av en berømt ulikhet i sannsynlighetsregning (Jensen's ulikhet som er vist i appendiks 1) følger at forventet nytte av A oppfyller

$$\mathrm{E}U(A) < U(\mu)$$

som alltid vil være tilfelle når $U(a)$ er strengt konkav (og *A* er reelt usikker).

Hvis nytten av det usikre aktivumet, *A*, kan representeres ved forventet nytte, $\mathrm{E}U(A)$, følger at en slik person alltid vil foretrekke et sikkert aktivum med verdi μ framfor et usikkert aktivum, *A*, som har forventningsverdi også lik μ.

En slik person sier vi har *risikoaversjon*. En person med nyttefunksjon, *U*, som er slik at $\mathrm{E}U(A) = U(\mu)$, sier vi er *risikonøytral*. Dette vil være tilfelle dersom $U(a)$ er lineær i *a* (se oppgave 2 nedenfor). For en person med strengt konveks *U* (for eksempel $U(a) = a^2$) vil vi ha $\mathrm{E}U(A) > U(\mu)$ (dette følger også av Jensen's ulikhet brukt på $-U(a)$, som er konkav). En slik person kunne vi kalle en risikosøker. Risikoaversjon er nok mest vanlig. Det at det er et marked for forsikringer er nettopp et uttrykk for at risikoaversjon er utbredt. Man er villig til å betale en pris for å redusere risikoen. Se appendiks 2 for et mer utførlig eksempel.

Oppgave 2

Anta en person som spiller **spill 1** ovenfor har en nyttefunksjon $U(a) = \sqrt{a+3}$, definert for $a > -3$.

a) Skisser $U(a)$. Påvis at U er strengt konkav (dvs. $U''(a) < 0$ for alle *a*.)

b) La *A* være fortjenesten ved **spill 1** ovenfor (vi fant $\mathrm{E}(A) = 4/3$). Beregn $\mathrm{E}U(A)$ og påvis risikoaversjon med hensyn på *A* for den aktuelle personen. **Hint:** Beregn $U(a)$ for de tre mulige verdiene av *a* og bruk definisjonen på forventning.

c) En person med lineær nyttefunksjon over *a* (dvs. det finnes konstanter *c* og *d* slik at $U(a) = c + d \cdot a$ for alle *a*). En slik person kalles risikonøytral. Forklar hvorfor, i dette tilfellet, $\mathrm{E}(U(A)) = U(\mu)$, der $\mu = \mathrm{E}(A)$.

Appendiks 1 Jensen's ulikhet

Setning. *Hvis X er en stokastisk variabel med forventning,* $\mathrm{E}(X)$*, og* $g(x)$ *er en vilkårlig konkav og deriverbar funksjon, gjelder:*

a) $\mathrm{E}g(X) \leq g(\mathrm{E}(X))$

b) *Hvis* $g(x)$ *er strengt konkav og* $\mathrm{Var}(X) > 0$*, har vi streng ulikhet i a):* $\mathrm{E}g(X) < g(\mathrm{E}(X))$.

Bevis:

Sett $\mu = \mathrm{E(X)}$ .Tangenten til kurven $g(x)$ for $x = \mu$, har ligningsframstilling

$$y = l(x) = g(\mu) + g'(\mu)(x - \mu)$$

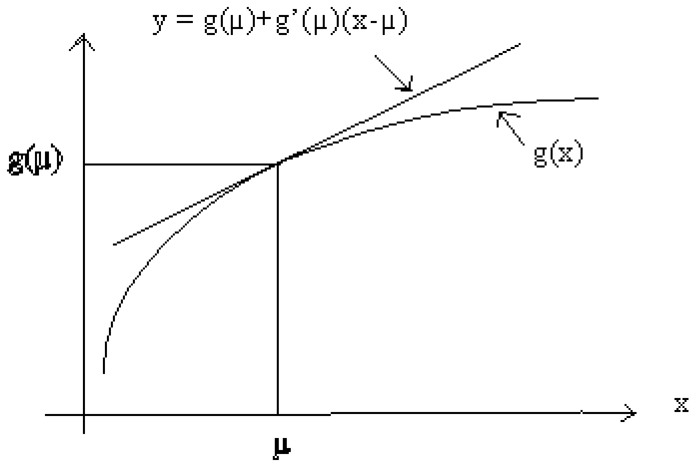
der $g'(\mu)$ er den deriverte av $g(x)$ for $x = \mu$. Siden g er konkav vil tangenten i sin helhet ligge over $g(x)$, dvs. $l(x) \geq g(x)$ for alle x. (Se figur 1). Hvis g er strengt konkav ($g''(x) < 0$ for alle x), vil $l(x) > g(x)$ for alle $x \neq \mu$.

Hvis vi erstatter x med den stokastiske variabelen X, får vi to nye stokastiske variable, $Y = l(X)$ og $Z = g(X)$, som må oppfylle $Y \geq Z$ uansett utfallet av eksperimentet som bestemmer verdien av Y og Z. Dermed må også $\mathrm{E}(Y) \geq \mathrm{E}(Z)$ (tenk på forventning som gjennomsnittsverdier). Siden $g(\mu)$ og $g'(\mu)$ er konstanter, følger av regel 4.7 i Løvås

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(Y) &= \mathrm{E}[g(\mu) + g'(\mu)(X - \mu)] = g(\mu) + g'(\mu)\mathrm{E}(X - \mu) \\ &= g(\mu) + g'(\mu)\mathrm{E}(X - \mu) = g(\mu) = g(\mathrm{E}(X)) \end{aligned}$$

Vi har altså at $\mathrm{E}(Z) = \mathrm{E}(g(X)) \leq \mathrm{E}(Y) = g(\mathrm{E}(X))$ som er a). Hvis g er strengt konkav og $\mathrm{Var}(X) > 0$, vil $Y > Z$ med positiv sannsynlighet. Dette leder til (litt knapp begrunnelse her) at $\mathrm{E}(Y) > \mathrm{E}(Z)$, som gir b).

Figur 1.



Tangenten til en konkav kurve ligger alltid over kurven

Appendiks 2 Et eksempel fra forsikring

En beslutningstaker – som vi vil kalle BT – har i utgangspunktet en formue på *F* kr, men risikerer et tap på *K* kr. Sannsynligheten for at tapet skal inntreffe er *p*. BT har anledning til å kjøpe en forsikring for å redusere et eventuelt tap. Forsikrikringen koster *q* kr pr. enhet forsikring, der en enhet forsikring gir en utbetaling på 1 kr dersom tap inntreffer.

Anta at BT kjøper *x* enheter forsikring. Den endelige formuen ved utløpet av forsikringsperioden kaller vi *A*, som er usikker. Dersom tapet ikke inntreffer, blir $A = a_1 = F - xq$ (sannsynligheten for dette er $1 - p$). Dersom tapet inntreffer, blir $A = a_2 = F - xq - K + x$ (sannsynlighet *p*).

Hva er optimalt valg av *x*? Vi antar at BT er strengt risikoavers – som kan uttrykkes ved at BT har en strengt konkav nyttefunksjon, $U(a)$. I tillegg antas at *U* er voksende og deriverbar. Streng konkavitet betyr at $U''(a) < 0$ for alle *a*, som innebærer at den deriverte, $U'(a)$, er strengt avtagende overalt – noe vi skal dra nytte av nedenfor. Nytten av det usikre aktivumet, *A*, defineres som forventet nytte, $\mathrm{E}(U(A))$. Denne vil være en funksjon av *x* som vi vil kalle $h(x)$. Vi får dermed (jfr. regel 4.7 i Løvås):

$$\text{(a1)} \quad \begin{aligned} h(x) &= \mathrm{E}(U(A)) = \sum_{\text{alle } a} U(a)P(A = a) = U(a_1)(1-p) + U(a_2)p \\ &= U(F - xq)(1-p) + U(F - xq - K + x)p \end{aligned}$$

definert for $0 \le x \le K$. Det optimale valget, kalt x_0, av *x*, kan nå defineres som den verdien av *x* som maksimerer $h(x)$. Vi finner den derverte av *h*:

(a2) $\quad h'(x) = -q(1-p)U'(F-xq) + (1-q)pU'(F-xq-K+x)$

Vi skal først se på spesialtilfellet at prisen på en enhet forsikring settes lik sannsynligheten for at tapet inntreffer, $q = p$. Dette kunne kalles "en rettferdig pris" i den forstand at forsikringsselskapet da, i det lange løp, hverken ville tjene eller tape på å selge forsikringen.

> [Når selskapet selger en enhet forsikring blir fortjenesten lik *q* dersom tapet ikke skjer, og lik $q-1$ dersom tapet skjer. Forventet fortjeneste blir da $q(1-p)+(q-1)p$ som er lik 0 hvis og bare hvis $q = p$]

Av (a2) finner vi da

(a3) $\quad h'(x) = p(1-p)\left[U'(F-xq-K+x) - U'(F-xq)\right]$

Spesielt får vi $h'(0) = p(1-p)\left[U'(F-K) - U'(F)\right] > 0$ siden $U'(a)$ er strengt avtagende. Dette impliserer at $x_0 > 0$ siden x_0 er den maksimerende verdien for *h*. BT bør altså kjøpe en forsikring.

Siden $x_0 > 0$ må vi ha $h(x_0) = 0$, som gir

(a4) $\quad U'(F-x_0q-K+x_0) = U'(F-x_0q)$

Siden $U'(a)$ er strengt avtagende, er (a4) mulig hvis og bare hvis de to argumentene er like, dvs.:

$$F - x_0q - K + x_0 = F - x_0q$$

eller

$$x_0 = K$$

Følgelig, ved "rettferdig" premie, $q = p$, er det optimale valget å tegne full forsikring, $x_0 = K$. Vi legger for øvrig merke til at, i dette tilfellet, blir $a_1 = a_2 = F - Kq$. M.a.o. Det usikre aktivumet, *A*, er nå redusert til et sikkert aktivum med verdi $F - Kq$.

Det kan nå vises (se oppgaven under) at, hvis forsikringsselskapet setter premien $q > p$, slik at selskapet har positiv forventet fortjeneste, så blir det optimale valget $x_0 < K$. BT vil i så fall akseptere litt risiko i sitt valg.

Oppgave 3

Vis den siste setningen, nemlig at $q > p$ impliserer $x_0 < K$. (**Hint:** Vis at $q(1-p) > (1-q)p$ og at $h'(K) < 0$. Merk også at $U(a)$ er forutsatt voksende.)